IV OLIMPÍADA REGIONAL DE MATEMÁTICA DA UNOCHAPECÓ
Gabarito - Treinamento 1 - Primeira Fase - Nível 1 - (5ª ou 6ª série)

Problema 1

Trata-se de números naturais.
O terceiro número é menor que 100; logo, no máximo é 99.
O triplo do terceiro é, então, no máximo, $3 \times 99 = 297$.
O segundo número é menor que 297; logo, é no máximo 296.
O dobro do segundo número é, então, no máximo, $2 \times 296 = 592$.
O primeiro número é menor que 592; logo é no máximo 591.

Problema 2

As condições enunciadas para achar o dia e o mês são 5:
(1) O dia é número primo.
(2) dia > (mês)^2
dia < (mês)^3.
(4) (dia + mês) é número primo.
(5) (dia - mês) não é número primo.
Para satisfazer as condições 1, 2 e 3, os dias possíveis são:
Fevereiro - 2^2 < dia primo < 2^3 - 5/2 e 7/2
Março - 3^2 < dia primo < 3^3 - 11/3, 13/3, 17/3, 19/3 e 23/3
Abril - 4^2 < dia primo < 4^3 - 17/4, 19/4, 23/4 e 29/4
Maio - 5^2 < dia primo < 5^3 - 29/5 e 31/5
Janeiro fica eliminado pela condição 3 e os demais meses pela condição 2. A condição 4 elimina: 7/2, todos os dias de março 17/4, 23/4, 29/4 e os dias de maio. Ficamos com apenas duas datas: 5/2 e 19/4 A condição 5 elimina 5/2.
Logo, o aniversário do professor é no dia 19 de abril.

Problema 3

Vamos representar por $19ab$ o ano em que a moça nasceu e por $18cd$ o ano em que a avó nasceu. 1938 - $19ab = ab \Rightarrow 38 - ab = ab \Rightarrow 38 = 2ab$. Logo $ab = 19$. No caso da avó temos, 1938 - $18cd = cd \Rightarrow 138 - cd = cd \Rightarrow 138 = 2cd$. Logo $cd = 69$. Assim a moça tinha 19 anos e a avó 69.

Problema 4

Seja x o número de sacos que o buro levava e y o número de sacos que o cavalo levava.“Se eu tomasse um saco dos teus...
burro: $x + 1$
cavalo: y - 1
”minha carga passaria a ser o dobro da tua.”
$x + 1 = 2(y - 1)$. (1.1)
”Por outro lado, se eu te desse um de meus sacos...”
burro: x - 1
cavalo: $y + 1$
”...tua carga se igualaria a minha!”
$x - 1 = y + 1$. (1.2)

De (1.1) e (1.2) resulta: $x = 7$ e $y = 5$.
Portanto, o burro levava 7 sacos e o cavalo 5 sacos.

Problema 5

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} = \frac{60+30+20+15+12+10}{120}$.

Sendo $60 + 30 + 20 + 10 = 120$, basta excluirmos 15 e 12 da soma, ou seja, excluiremos as frações $\frac{1}{8}$ e $\frac{1}{10}$ para que o resultado seja $\frac{120}{120} = 1$.

Problema 6

Na casa das unidades o algarismo das unidades aparecerá 90 vezes, pois teremos 9 opções na casa das centenas e 10 opções na casa das dezenas. Também na casa das dezenas o algarismo 5 aperecerá 90 vezes, já na casa das centenas ele aparecerá 100 vezes, totalizando 280 aparições do algarismo 5, de 100 a 999.

Problema 7

Com base nas informações dadas nos itens i), ii) e iii)obtemos o seguinte sistema:
i) 2A + B + C = 4,20
ii) A + B + 2C = 3,80
iii) 2A + 2B = 4,20
Resolvendo osistema obtemos A = 1,10, B = 1,30 e C = 0,70.
a) O buquê custará R$ 3,20, pois uma flor A custa R$ 1,10 e uma flor C custa R$ 0,70 e portanto $1{,}10 + 3 \times 0{,}70 = 3{,}20$
b) Sim, é possível. Organiza-se o sistema e em iii) isola 2B. Então calcula o i) e descobre que 2C = 3,60 - 2A. Então calcula-se ii) e descobre o valor de A. Ao descobrir o valor de A, descobre-se o valor dos restantes.

Problema 8

a) Temos que o perímetro do políogono representado pela borda do prato é 112 cm, pois são oito lados de 14 cm. Como a formiga faz 2000 paradas a cada 6 cm, ela caminha um total de 12000 cm. Na primeira parada que a formiga fizer no vértice A ela terá caminhado mmc(112,6) = 336 cm ela fará uma parada em A. Fazendo a divisão de 12000 por 336 quociente 35 e resto 240, portanto a formiga para 35 vezes no vértice A.
b) Observe que a formiga para em um dos vértices quando percorre uma distância múltipla de mmc(14,6) = 42, isto é, a cada 42 cm ela percorre três lados do polígono segue que:
saindo de A ela para em D;
saindo de D ela para em G;
saindo de G ela para em B;
saindo de B ela para em E;
saindo de E ela para em H;
saindo de H ela para em C;
saindo de C ela para em F;
saindo de F ela para em A.

Portanto, cada vez que a formiga parar em A, ela terá parado em todos os vértices a mesma quantidade de vezes. Já que ela parou 35 vezes em A falta agora analisarmos os 240 cm que sobraram da divisão de 12000 por 336. Dividindo 240 por 42 temos quociente 5 e resto 30, ou seja, ela vai fazer mais 5 paradas além das 35 já feitas em cada vértice, assim ela vai parar mais uma vez em D, G, B, E, H. Logo, a formiga para a mesma quantidade de vezes que A em C e F.

Problema 9

Começando com as moedas de 1 centavo, obtemos as seguintes possibilidades:
5 moedas de 1 centavo - 2 moedas de 5 centavos - 1 moeda de 10 centavos
5 moedas de 1 centavo - 4 moedas de 5 centavos
5 moedas de 1 centavo - 2 moedas de 10 centavos
10 moedas de 1 centavo - 1 moeda de 5 centavos - 1 moeda de 10 centavos
10 moedas de 1 centavo - 3 moedas de 5 centavos
15 moedas de 1 centavo - 2 moedas de 5 centavos
15 moedas de 1 centavo - 1 moeda de 10 centavos
20 moedas de 1 centavo - 1 moeda de 5 centavos
25 moedas de 1 centavo.
Começando agora com moedas de 5 centavos e excluindo as possibilidades anteriores, obtemos:
1 moeda de 5 centavos - 2 moedas de 10 centavos
3 moedas de 5 centavos - 1 moeda de 10 centavos
5 moedas de 5 centavos.
Portanto são 12 possibilidades.

Problema 10

Designemos as idades das amigas Ana, Beatriz, Carla, Débora e Elisa de, respectivamente, A, B, C, D e E.
Temos então as seguintes equações:
A + B + C + D + E = 5E (1)
A +(3A - E) + D +(3A - E) = 5A (2)
B +(3A - E) = 3B (3)
C +((3A - E) = 2E + 1 (4)
De (2) $\Rightarrow$ D = 2E - 2A
De (3) $\Rightarrow$ 2B = 3A - E
De (4) $\Rightarrow$ C = 3E - 3A + 1
Substituindo em (1) encontramos:
A + $\frac{3A-E}{2}$ + 3E - 3A + 1 + 2E - 2A + E = 5A ou, simplificando, 11E + 2 = 15A, que é satisfeita por E = 8 e A = 6 ou E = 23 e A = 17 ou... de tal forma que Elisa tem 23 anos.