IV OLIMPÍADA REGIONAL DE MATEMÁTICA DA UNOCHAPECÓ
Gabarito - Treinamento 1 - Primeira Fase - Nível 2 - (7ª ou 8ª série)

Problema 1
Vamos representar por A, G e L a quantidade de questões de Álgebra, Geometria e Lógica da Prova e por a, g e l as questões respondidas acertadamente em cada uma dessas áreas. As condições do problema fornecem as seguintes equações:
$\frac{a}{A} = 0{,}5$; $\frac{g}{G} = 0{,}7$; $\frac{l}{L} = 0{,}8$; $\frac{a+l}{A+L} = 0{,}62$; $\frac{g+l}{G+L} = 0{,}75$.
Substituindo as relações expressas pelas três primeiras equações nas outras duas, obtemos:
$\frac{0{,}5A+0{,}8L}{A+L} = 0{,}62 \Rightarrow 0{,}12\text{A} = 0{,}18\text{L} \Rightarrow \text{A} = \frac{3L}{2}$
$\frac{0{,}7G+0{,}8L}{G+L} = 0{,}74 \Rightarrow 0{,}04\text{G} = 0{,}06\text{L} \Rightarrow \text{G} = \frac{3L}{2}$
A porcentagem de questões acertadas é:
$\frac{a+g+l}{A+G+L} = \frac{0{,}5A+0{,}7G+0{,}8L}{A+G+L} = \frac{0{,}5\frac{3}{2}L+0{,}7\frac{3}{2}L+0{,}8L}{\frac{3}{2}L+\frac{3}{2}L+L} = \frac{2{,}6}{4} = 0{,}65 = 65\%$

Problema 2
$\text{a}^2 - \text{b}^2 = 37 \Rightarrow (\text{a} - \text{b})(\text{a} + \text{b}) = 37$.
Como 37 é primo, temos a única possibilidade:

a + b = 37
a - b = 1
$2\text{a} = 38 \Rightarrow \text{a} = 19 \Rightarrow \text{b} = 18$
Logo os números são 19 e 18.

Problema 3
Seja P o preço do pão, L o do leite e C o do café, sabemos que:
5P + 2L + C = 6,20 e
6P + 2L + 2C = 9,80.
Queremos saber o valor de 8P + 3L + 2C. Para isso devemos procurar dois números α e β tais que:
α(5P + 2L + C) + β(6P + 2L + 2C) = 8P + 3L + 2C. (1.3)
Logo,
5αP + 6βP = 8P, (1.4)
2αL + 2βL = 3L, (1.5)
αC + 2βC = 2C (1.6)
De (1.5) e (1.6) encontramos $\alpha = 1$ e $\beta = \frac{1}{2}$
Substituindo em (1.3), temos:
1(5P + 2L + C) + $\frac{1}{2}$(6P + 2L + 2C) = 8P + 3L + 2C,
1(6,20) + $\frac{1}{2}$(9,80) = 8P + 3L + 3C,
11,10 = 8P + 3L + 2C.
Logo, a terceira mulher gastou R$ 11,10.

Problema 4
Suponha que o primeiro marco indica ab, que corresponde a $10a + b$ quilômetros. O segundo marco registra, portanto, ba, que corresponde a $10b + a$. No terceiro marco o número pode ser escrito como $100a + b$ ou $100b + a$. Sendo a velocidade, constante,

a distância percorrida entre o segundo e o terceiro marcos é igual à percorrida entre o primeiro e o segundo marcos. Esta última é inferior a 100, portanto o algarismo das centenas no terceiro marco é 1. Como b não pode ser igual a 1, segue que a é igual a 1. Logo, escrevendo a equação:
n$^{\underline{o}}$ do 2$^{\underline{o}}$ marco - n$^{\underline{o}}$ do 1$^{\underline{o}}$ marco = n$^{\underline{o}}$ do 3$^{\underline{o}}$ marco - n$^{\underline{o}}$ do 2$^{\underline{o}}$ marco.
Ou
$(10b + 1)$ - $(10 + b) = (100 + b)$ - $(10b + 1) \Rightarrow 18b = 108 \Rightarrow b = 6$.
Assim concluimos que os marcos são: 16, 61 e 106 quilômetros e a velocidade é 45 km/h.

Problema 5
Afirmamos que n deve ter no máximo 4 dígitos. De fato, se n tivesse mais de 4 dígitos, o número total de dígitos, que seriam escritos, é maior ou igual ao número de dígitos usados para escrever

1, 2, ..., 9, 10, ..., 99, 100, ..., 999, 1000, ..., 9999, 10000

que é $9 \times 1 + 90 \times 2 + 900 \times 3 + 9000 \times 4 + 5 = 38894 > 1002$. Portanto, n tem quatro ou menos dígitos. Suponhamos que n tenha 4 dígios. A equação a ser resolvida é $9 \times 1 + 90 \times 2 + 900 \times 3 + (n$ - $90) \times 4 = 1002$, que não tem solução para n natural. Supondo que n tenha 3 dígitos encontramos a solução $n = 370$.

Problema 6
Para facilitar vamos dar nome as pessoas: Gustavo sobe dois degraus por vez e Marcosa sobe um degrau por vez. Conforme diz o enunciado, quando Gustavo chegou ao topo, ele contou 28 degraus. Como ele anda dois por vez, na verdade o Gustavo deu 14 passos. Então, quando ele chegou no topo, o Marcos havia andado 14 degraus, pois ele anda um por vez. Como a escada está andando, ao mesmo tempo que Gustavo andou 28 e Marcos andou 14, a escada andou sozinha x degraus. O enunciado diz que quando Marcos chegou ao topo ele contou 21 degraus. Como ele está no 14, ainda faltam 7 para que ele chegue ao topo (ou seja, falta metade do que já andou). Portanto, durante estes 7 que faltam, a escada andará sozinha mais $\frac{x}{2}$ degraus. Feito! O número de degraus visíveis para o Gustavo e para o Marcos deve ser o mesmo. Então basta montar a equação:
$28 + x = (14 + x) + (7 + \frac{x}{2})$,
cuja solução é $x = 14$. Como Gustavo andou $28 + x$ degraus, temos que 42 é o número de degraus visíveis.

Problema 7
A distância de 60 passos que João andou antes de começar a brincadeira corresponde a 40 passos de Pedro. Enquanto Pedro dá 5 passos, João dá 6 passos. Assim a cada 5 passos que Pedro dá, ele se aproxima 1 passo de João. Para alcançar João, Pedro deverá se aproximar 40 passos, o que ocorrerá quando ele tiver dado $40.5 = 200$ passos.'

Problema 8

Por (a) temos que choveu exatamente 7 vezes pela manhã ou pela tarde, mas pelo item (b) concluímos que se choveu durante a tarde, só pode ter tido dia de sol pela manhã, restando as condições de um dia todo ensolarado e de manhã chuvosa e tarde com sol.
Iniciaremos a resolução do problema, usando o pressuposto de (a), supondo que choveu em sete tardes, o que nos leva a concluir por (b), que ocorreram 7 manhãs de sol. Mas isto entra em contradição com o item (d).
Suponhamos então, que choveu em 6 tardes e 1 manhã. De (b) teremos 6 manhãs de sol e de (c) teremos 5 tardes sem chuva, somando 11 dias. Porém destas 5 tardes sem chuva, em uma manhã choveu e nas outras 4 manhãs fez sol, totalizando 10 manhãs de sol, o que contradiz o item (d).
Suponhamos então, que choveu em 5 tardes e 2 manhãs. De (b) teremos 5 manhãs de sol e de (c) teremos 5 tardes sem chuva, somando 10 dias. Porém destas 5 tardes sem chuva, em 2 manhãs choveu e nas outras 3 manhãs fez sol, totalizando 8 manhãs de sol, o que contradiz o item (d). Suponhamos então, que choveu em 4 tardes e em 3 manhãs. De (b) teremos 4 manhãs de sol e de (c) teremos 5 tardes sem chuva, somando 9 dias. Porém destas 5 tardes sem chuva, em 3 manhãs choveu e nas outras 2 manhãs fez sol, totalizando 6 manhãs de sol. Portanto o estudante teve 9 dias de férias (as outras possibilidades também levam a contradições).

Problema 9

Suponhamos que sejam n cadeiras. Seja N o número da cadeira do vencedor. É claro que N é ímpar. Além disso N = 1 se, e somentese, n é uma potência de 2. SejaN>1. O número de estudantes que saem do jogo antes de o vencedor dizer sim pela primeira vez é $\frac{N-1}{2}$ e o vencedor está na cadeira 1. Então n - $\frac{N-1}{2}$ = 2 ^{m}, ou seja, N = 2n - 2^{m+1} + 1 (m inteiro positivo). É fácil ver que N é o menor inteiro positivo com essa propriedade.
Seja k um inteiro positivo tal que $2^k \leq n < 2^{k+1}$. Então, 2n - 2^{k+1} + $1 \geq 1$ e 2n - 2^{k+2} + 1 <0; logo, N = 2n - 2^{k+1} + 1.
Se n = 1994, então $2^{10} = 1024 < 1994 < 2048 = 2^{11}$ e N = 2 . 1994 - 2^{11} + 1 = 1941.

Problema 10

Com 4 peças formamos 1 quadrado. Usamos estes blocos de 4 peças para fazer novos quadrados. Assim:
4 blocos $\rightarrow 4 \times 4 = 16$ peças
9 blocos $\rightarrow 9 \times 4 = 36$ peças
16 blocos $\rightarrow 16 \times 4 = 64$ peças
25 blocos $\rightarrow 25 \times 4 = 100$ peças
36 blocos $\rightarrow 36 \times 4 = 144$ peças.
Assim, o número de peças usadas será múltiplo de 4 por um quadrado perfeito.
1999 = 499 . 4 + 3
O quadrado perfeito mais próximo de 499 é $22 \times 22 = 484$.
Logo:
499 . 4 + 3 = (484 + 15 . 4 + 3 = 484 . 4 + 15 . 4 + 3 = 22^2 .4 + 63. Portanto sobram 63 peças.