IV OLIMPÍADA REGIONAL DE MATEMÁTICA DA UNOCHAPECÓ
Gabarito - Treinamento 1 - Primeira Fase - Nível 3 - (Ensino Médio)

Problema 1

Suponhamos que Pedro nasceu no dia x, ($1 \leq x \leq 31$) do mês y, ($1 \leq y \leq 12$).
Pelo enunciado, $12x + 31y = 368$. Observa-se que 4 é um divisor de 12 e 368 e, como 31 e 4 são primos entre si, 4 tem que ser um divisor de y. Os possíveis valores de y 4, 8 e 12. Somente $y = 8$ dará um valor inteiro para x. Temos $y = 8$ e $x = 10$. O aniversário de Pedro é no dia 10 de agosto. O produto pedido é 80.

Problema 2

(D) Pela promoção quem levar 2 unidades, paga pelo preço de 1,5 unidades, logo quem levar 4 unidades paga pelo preço de 3 unidades, ou seja, leva 4 e paga 3.

Problema 3

Analisando os pares de números consecutivos, 2 e 3; 3 e 4; 4 e 5; 5 e 6; 6 e 7; 9 e 10; 10 e 11; 11 e 12; 12 e 13, é fácil verificar que se dois alunos consecutivos erraram ao afirmar que o número era múltiplo de um desses pares, então o número de alunos que erraram seria maior que 2. Restam, portanto, os pares 8 e 9 e 7 e 8 e o par que produz um número menor que 50000 é o par 7 e 8 ao qual corresponde o número 25740.

Problema 4

Sempre é possível resolver esse tipo de problema com a chamada redução à unidade, que consiste no seguinte:
21 pintores, trabalhando 8 horas por dia, pintam o edifício em 6 dias;
1 pintor, com 8 horas por dia, pinta $\frac{1}{21}$ do edifício em 6 dias;
1 pintor, com 1 hora por dia, pinta $\frac{1}{21} \times \frac{1}{8}$ do edifício em 6 dias;
1 pintor, com 1 hora por dia, pinta $\frac{1}{21} \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{6}$ do edifício em 1 dia;
9 pintores, com 7 horas por dia, pintam $9 \times 7 \times \frac{1}{21} \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{16}$ do edifício em 1 dia;
logo, 9 pintores, trabalhando 7 horas por dia, precisam de 16 dias para pintar o edifício todo.

Problema 5

Uma pessoa que tenha comprado x objetos pagou x por cada objeto, logo gastou x^2.
Sejam x e y, respectivamente, as quantias gastas pelo marido e pela esposa. Temos:
$x^2 = y^2 + 48 \Leftrightarrow (x + y)(x - y) = 48$
Como x e y são inteiros positivos então $x + y \geq x - y$, só precisamos considerar $x + y \geq 8$ e por isso temos as seguintes possibilidades:
1º) $x + y = 8$ e $x - y = 6 \Rightarrow x = 7$ e $y = 1$
2º) $x + y = 12$ e $x - y = 4 \Rightarrow x = 8$ e $y = 4$
3º) $x + y = 16$ e $x - y = 3 \Rightarrow Y = \frac{13}{2}$, o que não interessa
4º) $x + y = 24$ e $x - y = 2 \Rightarrow x = 13$ e $y = 11$
5º) $x + y = 48$ e $x - y = 1 \Rightarrow y = \frac{47}{2}$, o que não interessa.
Como João comprou 7 objetos a mais que Maria e José comprou 9 objetos a mais que Catarina, concluimos que João comprou 8, Maria 1, José 13 e Catarina 4. Segue que

os casais são :
JOão e Catarina, José e Ana, Pedro e Maria.

Problema 6
Note que a sequência de oito letras ABCDEDCB SE REPETE. cOMO $1993 = 8 \cdot 249 + 1$, fica claro que a 1993ª letra será a 1ª após 249 grupos iguais a ABCDEDCB, ou seja, B.

Problema 7
Raul pode ter feito essa afirmativa numa terça-feira ou numa sexta-feira, já que ele só mente às quartas, quintas e sextas-feiras. Cida fez tal afirmativa num sábado ou numa terça-feira, pois ela menta apenas aos domingos, segundas e terças-feiras. Desta forma, o único dia em que os dois poderiam ter feito tal afirmação foi numa terça-feira.

Problema 8
Cada pata pode estar de 11 modos distintos (com fita de cor 1, com fita de cor 2, ..., com fita de cor 10, sem fita). Assim, aparentemente, existem $11 \times 11 = 121$ modos de marcar um pássaro. Acontece que, quando pensamos dessa forma, uma das situações é o pássaro não ter fita em nenhuma das patas e isso não pode ocorrer. Logo, existem 121 - 1 = 120 modos de marcar os pássaros.

Problema 9
Sejam C e G, respectivamente, o número de cães e gatos de Itapipoca. O número de cães que pensam que são gatos é $\frac{10C}{100} = \frac{C}{10}$
O número de gatos que pensam que são gatos é $\frac{90G}{100} = \frac{9G}{10}$
Logo, o total de animais que pensam que são gatos é $\frac{C}{10} + \frac{9G}{10}$.
Por outro lado, o psicólogo garante que 20% de todos os animais pensam que são gatos, ou, seja,
$\frac{20(C+G)}{100} = \frac{@(C+G)}{10}$.
Assim,
$\frac{C}{10} + \frac{9G}{10} = \frac{@(c+G)}{10} \Rightarrow$ C + 9G = 2C + 2G $\Rightarrow$ C = 7G.
Podemos concluir então que o número de cães são 7/8 do total de animais, ou 87,5%.

Problema 10
Vamos analisar o problema de trás para frente. O jogador que diser dezembro (e não 31) estará perdido. Assim, aquele que disser novembro 30 ganhará pois obrigará o adversário a dizer dezembro 30. Portanto novembro 30 será um lance vencedor (V). Para necessariamente poder dizer novembro 30 o jogador (vencedor) dirá outubro 29, pois isto obrigará o adversário a dizer novembro 29 (e daí novenbro 30 para o vencedor) ou outubro 30 (que também levará a novembro 30). Prosseguindo desta maneira, o vencedor dizendo setembro 28 obrigará o seu oponente a dizer ou setembro 29 (o que leva a outubro 29), ou setembro 30 (o que leva a novembro 30), ou dezembro 28 (o que leva à vitória). Assim, o vencedor deverá percorrer uma trilha de lances que podem passar por: novembro 30, outubro 29, setembro 28, agosto 27, julho 26, junho 25, maio 24, abril 23, março 22, fevereiro 21 e, finalmente janeiro 20.

Ganha portanto o jogador que começar a partida, e ele deve começar citando janeiro 20. Daí para frente basta ele se encaixar em uma das datas da trilha acima não permitindo (é sempre possível) que o seu adversário as cite.